

Le problème du sac à dos fait partie des problèmes **d'optimisation** les plus étudiés ces cinquante dernières années, en raison de ces nombreuses applications dans la vie courante. En effet, ce problème intervient souvent comme sous-problème à résoudre dans plusieurs domaines : la logistique comme le chargement d'avions ou de bateaux, l'économie comme la gestion de portefeuille client ou dans l'industrie comme la découpe de matériaux.

90% des élèves ont rédigé une solution au problème. Cette solution est la solution optimale au problème du sac à dos tel qu'il était exposé dans ce devoir maison. Tous ont «joué le jeu» et certains ont mis à profit un usage remarquable des outils numériques de leurs choix. Certains ont même développés des compétences sur Tableur.

On souhaitait prendre une partie de ces objets dans notre sac-à-dos, malheureusement, ce dernier dispose d'une capacité limitée. On ne pourra pas toujours mettre tous les objets dans le sac étant donné que la somme des poids des objets ne peut pas dépasser la capacité maximale.

On va cependant chercher à maximiser la somme des valeurs des objets qu'on va emporter avec soi.

Solution naïve (ou méthode « Force Brute ») :

On pourrait être tenté d'énumérer toutes les combinaisons d'objets possibles qui satisfont à la capacité maximale du sac ou qui s'en rapprochent (le sac ne doit pas être obligatoirement rempli à fond). Néanmoins, on arrive rapidement à un temps de résolution trop long pour un élève de 5^{ème}.

Néanmoins, certains élèves de 5^{ème}6 ont tenté une démarche succincte en élaborant une partie de la liste des combinaisons possibles du choix des objets au travers de leur narration de recherche.

Les trois quart des élèves ont élaboré et expliqué une stratégie. Sans le savoir ils ont mis en place ce que l'on appelle « L'algorithme Glouton ».

Solution approchée (ou méthode « Algorithme Glouton ») :

L'idée à suivre, si on veut développer une méthode gloutonne, est d'ajouter les objets de valeurs élevées en premier... jusqu'à saturation du sac.

On calcule donc les quotients **valeurs/poids** pour dresser la liste décroissante des objets ayant la plus grande valeur.

90 % des élèves ont trouvé qu'il fallait choisir les objets suivants :

Le casque virtuel, le jeu PS2, la lampe de poche, le livre Harry Potter, la console Nintendo et toutes les figurines STAR WARS.

Ce qui fait un total en poids de $0,140 + 0,125 + 0,125 + 0,240 + 0,200 + 10 \times 0,003 = \mathbf{0.860 \text{ kg}}$ (la contrainte des 1 kg est respectée) et un total monétaire de :

$12.90 + 6.50 + 8.50 + 9 + 55 + 10 \times 2.50 = \mathbf{116.90 \text{ €}}$



Cette solution est-elle la meilleure ?

Rien, *a priori*, ne garantit l'optimalité de cette solution. Néanmoins, pour le niveau 6eme, les poids que j'ai fourni dans le devoir maison sont relativement équilibrés, de sorte que la solution fournie avec les quotients valeur/poids soit optimale.

Le problème du sac à dos

- Classe : 5eme
- Thème de travail concerné : Résoudre une tâche complexe

Compétence attendue		
Mettre un maximum d'objet dans un sac à dos en optimisant des contraintes de masse et de gains. - S'engager dans une démarche, questionner, manipuler. - Tester, essayer plusieurs pistes de résolution.. - Résoudre des problèmes (tâches complexes).		
Connaissances	Capacités	attitudes
• Nombres décimaux • Unités de mesure des masses	Savoir calculer et raisonner	Prise d'initiatives

- La situation complexe

L'élève doit mettre en œuvre un raisonnement pour déterminer la solution optimale. Plusieurs stratégies sont possibles, plusieurs solutions également, même s'il y a existence d'une solution optimale. L'élève comparant deux listes différentes et retenant la plus avantageuse sera valorisé même s'il n'a pas la solution optimale.

- Production ou réalisation attendue

Français		Mathématiques		Note globale
Présentation claire et soignée (paragraphes, copie aérée...)	/1	Il y a des exemples qui répondent au problème	/3	/20
Correction et clarté de l'expression	/1	Il y a des exemples qui « ne marchent pas »	/3	
Emploi de connecteurs (logiques et temporels) utiles à l'organisation	/1	Cohérence dans la démarche (enchaînement logique, prise en compte d'erreurs...)	/2	
Précision, minutie de l'explication	/1	Au moins une solution est expliquée.	/4	
Sincérité du récit (expression des sentiments, des doutes, des erreurs...)	/1	Argumentation, tentative de démonstration, de généralisation	/3	
Total	/5	Total	/15	

- Outils de travail

Tous les outils numériques à disposition de l'élève.

- Modalités de travail

Travail à la maison.

Pour ceux qui veulent aller plus loin...

Mais qu'en serait-il si les poids des objets étaient très déséquilibrés ?

Voici l'exemple : on dispose d'un sac à dos d'une capacité de 40 kg et de la liste d'objets suivante

Objets	A	B	C	D	E	F
Valeurs	30	12	12	12	12	4
Poids	24	10	10	10	10	1
Valeurs/ Poids	1,25	1,2	1,2	1,2	1,2	4

Liste d'objets à notre disposition :

L'algorithme Glouton choisira l'objet A, l'objet F + un des objets B,C,D ou E, ce qui fera une somme des valeurs de 46 ($30 + 4 + 12 = 46$) et un poids total de 35 kg ($24 + 1 + 10 = 35$).

Pourtant, on remarque directement qu'en choisissant les 4 objets B,C,D,E on aurait pu atteindre une somme des valeurs de 48, pour un poids de 40 kg.

L'algorithme Glouton (mis en oeuvre par la plupart des élèves lors du devoir maison) n'a pas produit ici une solution optimale.

Comment faire pour avoir une solution optimale ?

Il existe de nombreuses méthodes exactes de résolution du problème. Citons à titre d'exemples :

- la programmation dynamique
- la programmation divide-and-conquer.
- La procédure d'évaluation et de séparation (PSE).
- les algorithmes génétiques.

Dans certains cas, les algorithmes gloutons produisent d'excellents résultats et sont appropriés au problème, dans d'autres cas, non.

Généralement, si les poids des objets sont très déséquilibrés, les algorithmes gloutons produiront une solution non optimale car de tels algorithmes ont une mauvaise vision globale du problème.

Il faut réfléchir à la solution à adopter en fonction du problème.

Signature de l'élève

Signature des parents